PROBABILITAT

Josep Pla i Carrera

Dos principis

El principi multiplicatiu

Suposem que una experiència E_1 té n_1 resultats possibles i una altra E_2 en té n_2. Suposem que realitzem alhora i conjuntament les dues experiències. L'experiència $E_1 \times E_2$ tindrà $n_1 \cdot n_2$ resultats possibles.

El principi additiu

Suposem que dues experiències excloents E_1 i E_2 tenen respectivament n_1 i n_2 resultats possibles. L'experiència $E_1 \oplus E_2$ que consisteix en l'ocurrència d'una d'ambdues experiències té $n_1 + n_2$ resultats possibles.

Exemples:

a) Hem d'anar a Madrid i per obres és necessari fer un tros en tren i un tros en autobús. Hi ha tres itineraris possibles de tren i dos d'autobús. De quantes meneres diferents podem anar a Madrid?

b) Hem d'anar a Madrid i podem fer-ho en tren o en autobús. Suposem que hi ha tres itineraris possibles d'autobús i dos de tren. De quantes maneres diferents podem anar a Madrid?

Anàlisi combinatòria

Parts d'un conjunt

El nombre de parts (o subconjunts), d'un conjunt E amb m elements és 2^m.

Permutacions

Una permutació de m objectes consisteix a col·locar els m objectes en m llocs de manera que cada lloc solament en contingui un.

El primer lloc el podem omplir amb qualsevol dels m elements, mentre que el segon solament amb un dels $m-1$ que queden i el tercer amb un dels $m-2$, etc. El darrer lloc amb un sol element. Ara apliquem el principi multiplicatiu.

El nombre de permutacions possibles de m objectes és

$$P_m = m! = m(m-1)\cdots(m-k)\cdots 2 \cdot 1.$$

Variacions

Una variació de m objectes presos de k en k consisteix a col·locar k dels m objectes en k llocs de manera que cada lloc solament en contingui un. Dues variacions amb els mateixos objectes però col·locats de maneres diferents són diferents.
El nombre de variacions de m elements presos de k en k és

$$V_m^k = m(m-1)\cdots(m-(k+1)) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Combinacions

Una combinació de m elements presos de k en k consisteix a triar k elements d'entre els m donats. Així doncs, dues variacions de m elements presos de k en k, que tinguin els mateixos elements i diferent col·locació, són la mateixa combinació. Per tant, cada combinació de m objectes presos de k en k dóna lloca a $k!$ variacions, és a dir,

$$C_m^k = \frac{1}{k!}\cdot V_m^k.$$

El nombre de combinacions de m elements presos de k en k és

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \binom{m}{k}.$$

Variacions amb repetició

A les variacions, un cop s'ha col·locat un objecte en un lloc ja no és possible tornar-lo a col·locar en un altre. Si es disposa de suficient nombre de còpies de cada objecte, un cop n'hem col·locat un en un lloc, és possible col·locar-ne una altra còpia en un altre lloc. Aleshores quan anem a col·locar aquest segon objecte (o còpia) estarem en les mateixes condicions que quan varem col·locar el primer.
Una variació amb repetició de m objectes presos de k en k consisteix a col·locar k còpies d'alguns dels m objectes en k llocs de manera que cada lloc solament en contingui una.
El nombre de variacions amb repetició de m elements presos de k en k és

$$VR_m^k = m^k.$$

Permutacions amb repetició

Si tenim m objectes dels quals k_1 són iguals entre si, k_2 són iguals entre si, $\ldots, k_r$ són iguals entre si, amb $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = m$ podem fer-ne les corresponents permutacions, que consistiran a col·locar-los en m llocs, i ocupant cada lloc un sol objecte.
Si tots els objectes fossin diferents, tindríem les permutacions de m objectes, P_m. Si hi ha repeticions de k_1 objectes, és evident que intercanviant el lloc d'aquests que són iguals,

obtindrem la mateixa permutació amb repetició. Però de canvis de lloc possibles d'aquests k_1 n'hi ha $k_1!$. Això mateix podem dir dels $k_2, \ldots, k_r$ objectes repetits.
El nombre de permutacions amb repetició de m objectes dels quals k_1 són iguals entre si, k_2 són iguals entre si, ..., k_r són iguals entre si, amb $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = m$ és

$$PR_m^{k_1\, k_2 \ldots k_r} = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \cdots k_r!}.$$

Combinacions amb repetició

Donat m objectes, dels quals en tenim tantes còpies com faci falta, una combinació amb repetició d'aquests m objectes presos de k en k consisteix a triar k còpies d'alguns d'aquests objectes.

Per tal de calcular el nombre de combinacions en repetició de m objectes presos de k en k, considerem el següent exemple: Tenim una pila de boles i cada una porta un número que pot ser 1, 2, 3, 4, ($m = 4$), i n'hem de triar 3 ($k = 3$). Per tal que quedi clara l'elecció, disposem d'una capsa amb $m = 4$ compartiments, marcats per $m - 1 = 3$ separadors. Al primer compartiment hi col·locarem les boles que hàgim pres del número 1, al segon les del número 2, etc. Totes les possibles col·locacions es veuen en aquesta taula

<table>
<tr><td>111</td><td>→</td><td>***</td><td></td><td></td><td></td><td>→</td><td>***|||</td></tr>
<tr><td>112</td><td>→</td><td>**</td><td>*</td><td></td><td></td><td>→</td><td>**|*||</td></tr>
<tr><td>113</td><td>→</td><td>**</td><td></td><td>*</td><td></td><td>→</td><td>**||*|</td></tr>
<tr><td>114</td><td>→</td><td>**</td><td></td><td></td><td>*</td><td>→</td><td>**|||*</td></tr>
<tr><td>122</td><td>→</td><td>*</td><td>**</td><td></td><td></td><td>→</td><td>*|**||</td></tr>
<tr><td>123</td><td>→</td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td></td><td>→</td><td>*|*|*|</td></tr>
<tr><td>124</td><td>→</td><td>*</td><td>*</td><td></td><td>*</td><td>→</td><td>*|*||*</td></tr>
<tr><td>133</td><td>→</td><td>*</td><td></td><td>**</td><td></td><td>→</td><td>*||**|</td></tr>
<tr><td>134</td><td>→</td><td>*</td><td></td><td>*</td><td>*</td><td>→</td><td>*||*|*</td></tr>
<tr><td>144</td><td>→</td><td>*</td><td></td><td></td><td>**</td><td>→</td><td>*|||**</td></tr>
<tr><td>222</td><td>→</td><td></td><td>***</td><td></td><td></td><td>→</td><td>|***||</td></tr>
<tr><td>223</td><td>→</td><td></td><td>**</td><td>*</td><td></td><td>→</td><td>|**|*|</td></tr>
<tr><td>224</td><td>→</td><td></td><td>**</td><td></td><td>*</td><td>→</td><td>|**||*</td></tr>
<tr><td>233</td><td>→</td><td></td><td>*</td><td>**</td><td></td><td>→</td><td>|*|**|</td></tr>
<tr><td>234</td><td>→</td><td></td><td>*</td><td>*</td><td>*</td><td>→</td><td>|*|*|*</td></tr>
<tr><td>244</td><td>→</td><td></td><td>*</td><td></td><td>**</td><td>→</td><td>|*||**</td></tr>
<tr><td>333</td><td>→</td><td></td><td></td><td>***</td><td></td><td>→</td><td>||***|</td></tr>
<tr><td>334</td><td>→</td><td></td><td></td><td>**</td><td>*</td><td>→</td><td>||**|*</td></tr>
<tr><td>344</td><td>→</td><td></td><td></td><td>*</td><td>**</td><td>→</td><td>||*|**</td></tr>
<tr><td>444</td><td>→</td><td></td><td></td><td></td><td>***</td><td>→</td><td>|||***</td></tr>
</table>

Tal com indica la darrera columna de la taula, podem identificar cada tria amb una seqüència de tres asteriscs i tres barres, corresponents a les boles i als separadors, i fet de totes les maneres possibles; i d'aquestes n'hi ha tantes com les permutacions amb repetició de 6

elements amb 3 i 3 de repetits. En general, tindríem boles numerades amb 1, etc., m, de les quals n'hem de triar k, i la capsa hauria de tenir $m-1$ separadors.
El nombre de combinacions amb repetició m objectes presos de k en k és

$$CR_m^k = PR_{m-1+k}^{m-1,k} = \frac{(m-1+k)!}{(m-1)!k!} = C_{m+k-1}^k.$$

Primera aproximació a la probabilitat

Considerem un fenomen que té un nombre finit de resultats possibles $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$. És l'*espai mostral.*
Suposem que cada resultat possible a_i té associat un nombre real p_i tal que

$$0 \leq p_i \leq 1$$

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1} + p_n = 1$$

El conjunt de valors p_i és una *valoració probabilística* de l'espai mostral.
Un *succés* A està format per un cert nombre r de resultats possibles de l'espai mostral S:

$$A = \{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}\}.$$

Direm que la *probabilitat* $P(A)$ *del succés* A és el valor

$$P(A) = p_{i_1} + \cdots + p_{i_r}.$$

Un fenòmen és *equiprobable* quan $p_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$. Aleshores

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{\text{casos favorables a } A}{\text{casos possibles}}.$$

Problemes

PR1.–Proveu que (a) $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.
(c) $P(S) = 1$.
(b′) En general, $P(A_1 \cup \cdots \cup A_m) = P(A_1) + \cdots + P(A_m)$, si $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$.
(d) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
(d′) Generalitzeu (d) a tres, quatre, etc. m successos.

(e) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$, on $\overline{A}$ indica l'esdeveniment contrari de A.
(f) Si $A \subseteq B$, aleshores $P(A) \leq P(B)$ i $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

PR2.–Aquest problema suggereix la definició general de probabilitat P en un espai mostral S. És una aplicació dels subconjunts de S en $\mathbb{R}$ que compleixi les tres propietats:
(a) Per a cada $A \subseteq S$, $0 \leq P(A) \leq 1$, per a tot succés A.
(b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, si $A \cap B = \emptyset$.
(c) $P(S) = 1$.
Podeu veure que aleshores es compleixen les propietats (b$'$), (d), (d$'$), (e) i (f) del problema anterior.
Aquesta definició permet de generalitzar el cas *discret* al cas general en el qual S pot ser un conjunt infinit numerable o no numerable. L'únic que cal tenir en compte és que la probabilitat P ha d'estar definida en una família $\mathcal{A}$ de subconjunts d'S tancada per unió i per pas al complementari. Cal, a més, que $S \in \mathcal{A}$.
Un exemple concret ens el proporcionen els subconjunts d'un conjunt geomètric S que sigui una superfície o un sòlid. Aleshores, si $A \subseteq S$,

$$P(A) = \frac{\text{àrea d'}(A)}{\text{àrea d'}(S)} \qquad \text{o} \qquad P(A) = \frac{\text{volum d'}(A)}{\text{volum d'}(S)}.$$

Probabilitat condicionada i independència

Considerem el següent exemple: d'un lot de 100 productes amb 80 sense defectes i 20 amb defectes n'agafem dos i ho fem (a) amb substitució, (b) sense substitució.
Considerem ara els següents successos

$$A = \{\text{el primer article és defctuós}\}$$

$$B = \{\text{el segon article és defectuós}\}$$

En el primer cas $P(A) = P(B) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. En el segon cas, $P(A) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$. Però quin és ara el valor de $P(B)$? És clar que ara, en el cas (b), el valor que pren $P(B)$ depén del que hagi passat amb el succés A, ja que el comportament de la mostra varia segons que s'hagi esdevingut A o no. Aleshores indicarem $P(B|A)$ la probabilitat del succés B en el ben entès que el succés A ha succeït prèviament.
En l'exemple que estem comentant és clar que $P(B|A) = \frac{19}{99}$. (En realitat l'espai mostral ha canviat i els successos estan condicionats a A.)
Formalment definim la *probabilitat condicional* per l'expressió

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Exemple. Llancem dos daus i anotem els resultats $\langle x_1, x_2 \rangle$, on x_i designa el resultat de l'i-èsim dau ($i = 1, 2$). Considerem els successos

$$A = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10\} \qquad \text{i} \qquad B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 < x_2\}.$$

Ara podem considerar el succés

$$A \cap B = \{\langle x_1, x_2 \rangle : x_1 + x_2 = 10, x_1 < x_2\} = \{\langle 4, 6 \rangle\}.$$

D'on

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{3}{36}} = \frac{1}{3}.$$

De forma anàloga podíem haver calculat primer la probabilitat de $P(B|A)$ i d'ella haver-ne deduït la probabilitat de $P(A \cap B)$.
En definitiva, doncs,

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A)$$
$$P(B \cap A) = P(A|B) \cdot P(B)$$

Llei de les probabilitats totals
Sigui A un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, és a dir, una família finita de successos tal que

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \text{ si } i \neq j, \qquad \text{i} \qquad S = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_{k-1} \cup B_k.$$

Aleshores

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_{k-1}) + P(A \cap B_k) = \\ &= P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k) \end{aligned}$$

Fórmula de Bayes
Si, com abans, A és un succés i $B_1, B_2, \ldots, B_{k-1}, B_k$ una partició de l'espai mostral S, aleshores

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot PB_i}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + \cdots + P(A|B_k) \cdot P(B_k)}, i = 1, 2, \ldots, k-1, k.$$

Aquesta fórmula rep el nom de fórmula per a calcular la probabilitat de les *causes*, ja que com que s'ha de donar una i només una de les causes B_i, ens permet de conèixer la probabilitat d'aquesta causa en el supòsit que s'hagi donat el succés A.

Successos independents

Dos successos A i B són *independents* si, i només si, cap d'ells no condiciona la probabilitat de l'altre; és a dir, si, i només si,

$$P(A|B) = P(A).$$

Dit d'una forma alternativa, si, i només si,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

En general, n successos $A_1, \ldots, A_n$ són *mútuament independents* si, i només si, per a tot $k = 2, \ldots, n$, tenim que

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Problemes

PR3.–Suposem que un cistell conté 550 pomes de les quals 28 són podrides i 47 són verdes. Si n'agafo una a l'atzar, quina és la probabilitat que sigui verda? I que sigui podrida?
Si suposem que les verdes no són podrides, quina és la probabilitat que sigui verda o podrida?
Si n'hi ha quinze de verdes i podrides, quina és la probabilitat que sigui verda i podrida?

PR4.–Tirem sis daus iguals. De quantes maneres podem aconseguir que les seves cares ens mostrin totes nombres diferents?
Ara tirem 6 daus de colors diferents. De quantes maneres podem aconseguir que els seus resultats siguin tots diferents?
En cada un dels casos, quina és la probabilitat que, en llançar-los una vegada, els sis daus ens mostrin un nombre diferent?

PR5.–*El problema de Fermat-Pascal.* Dos jugadors A i B juguen partides cada una de les quals té una probabilitat de $\frac{1}{2}$ de ser guanyada i de $\frac{1}{2}$ de ser perduda. Suposem que el resultat d'una partida no depèn pas dels resultats de les partides anteriors. (Pensem, per exemple, en una sèrie de "cares i creus".) Cada jugador guanya un punt quan guanya i no-res quan perd. Convenen a jugar-se 100 pta cada un i que el pot de 200 pta se l'endurà

el primer que guanyi 4 partides. Per la raó que sigui han de plegar quan A necessita dues partides per tal d'haver-ne guanyat 4 i B en necessita 3. Com cal repartir el pot?
Feu el càlcul
(a) suposant que els successos són les situacions reals a partir d'aquell moment, si el joc hagués continuat (*solució de Pascal*);
(b) veient que en quatre partides s'acaba el joc i considerant totes les sèries teòriques (equiprobables) de 4 partides. (*solució de Fermat*).

PR6.–Tirem una moneda, després tirem un dau, i finalment traiem una carta d'un joc de 52 cartes i considerem els successos

$$A = \text{surt cara}$$
$$B = \text{surt un 5 o un 6}$$
$$C = \text{surt una carta de piques}$$

Quin és l'espai mostral S associat a aquesta experiència? Quines són, en relació amb aquest espai mostral, els successos $A, B, C, A \cap B, B \cap C, C \cap A, A \cap B \cap C$? Quines són les probabilitats que els corresponen? Són independents de dos en dos? I tots tres?

PR7.–Llancem una moneda n vegades i indiquem si surt cara o creu escrivint un 1 o un 0. Com és l'espai mostral S? Quina és la probabilitat de cada un dels resultats possibles si la moneda és correcta? Quina és la probabilitat que surtin k uns? I la probabilitat que surtin $n-k$ zeros?
Suposem ara que la moneda està trucada i que la probabilitat que surti cara és p i la probabilitat que surti creu és $q = 1-p$. Quina és la probabilitat d'un resultat concret que tingui k cares? Quants casos possibles hi ha amb k cares? Quina és la probabilitat que, en tirar la moneda n vegades, surtin k cares exactament? (*Fórmula de Bernoulli.*)
I k cares almenys?
Calcula de dues maneres diferents la probabilitat que surti almenys una cara.

PR8.–Sigui $S = \{1, 2, \ldots, 120\}$ i suposem el cas equirepartit. Considerem els successos

$$A = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 3\}$$
$$B = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 4\}$$

Calculeu
(a) $P(A)$ i $P(B)$;
(b) $P(A \cap B)$ i $P(A \cup B)$.

Són independents els successos A i B?

Considereu ara el succés

$$C = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } 6\}.$$

Quina és la probabilitat de C? I de $B \cap C$? I de $B \cup C$? Els successos B i C, són independents?

Quina és la probabilitat del conjunt dels nombres divisibles per 3, no divisibles per 5 i divisibles per 4 o per 6? (En aquesta part suposem que en el conjunt infinit $\mathbb{N}$ de tots el nombres naturals la probabilitat de múltiple de tres és $\frac{1}{3}$, etc.)

PR9.–Calculeu la probabilitat que en agafar un nombre natural a l'atzar no sigui divisible ni per 3, ni per 4, ni per 6, però en canvi ho sigui per 2 o per 5.

PR10.–Calculeu la probabilitat que en agafar dos nombres naturals a l'atzar, siguin primers entre ells.

PR11.–Demostreu que és impossible de trucar una parella de daus de manera que la suma de les puntuacions (tirant-los a la vegada) tinguin la mateixa probabilitat.

PR12.–Quants enters hi ha entre 1 000 000 i 10 000 000 que no tinguin dues xifres iguals? I que no tinguin dues xifres iguals i consecutives ?

PR13.–Proveu que $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$. (*Indicació*: useu la llei de Morgan.)

PR14.–Hi ha 184 socis del Barça dels quals 123 són sudafricans i 78 són negres. Trieu a l'atzar un d'aquests 184 socis. Quina és la probabilitat que sigui negre?

PR15.–Si $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$, aleshores doneu $P(A \triangle B)$ en funció de $P(A), P(B)$ i $P(A \cap B)$ i en funció de $P(A), P(B)$ i $P(A \cup B)$.

PR16.–Si $A_{m_1} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_1\}$ i $A_{m_2} = \{\omega \mid \omega \text{ és múltiple de } m_2\}$, aleshores

$$P(A_{m_1} \cap A_{m_2}) \geq P(A_{m_1}) \cdot P(A_{m_2}).$$

En quins casos es dóna la igualtat?

PR17.–El menú turístic d'un restaurant és:

Elegiu un dels entrants:

Sopa, Suc de fruita, Cocktail de marisc.

Elegiu un dels següents plats de vianda:

Bistec

Roast Beaf

Pollastre rostit

Mandonguilles amb espaguetti

Elegiu un dels següents acompanyaments:

Patates fregides

Tomàquet a la grega

Pèsols saltejats

Elegiu una d'aquestes postres:

Fruita, Gelat, Formatge.

Elegiu:

Café o Té.

Quants menjars diferents hi pot fer un turista? Quin dia podrà tornar a casa seva si el primer dinar el fa el 28 de febrer de 1993, suposant que els vol tastar tots i només hi dina?

PR18.–Quina és la probabilitat que un succés A sigui independent d'ell mateix? Si A i B són dos successos independents i disjunts, quina és la probabilitat d'A? I la de B?

PR19.–Tirem cinc monedes independents. Quina és la probabilitat de 11010? Quina és la probabilitat que surtin tres cares exactament? Quina és la probabilitat que no surtin tres cares? *Nota.* La qüestió és força més complicada si els llançaments no són independents. Intenteu de donar-hi una resposta.

PR20.–*Argument de d'Alembert.* Llancem dues monedes. Són possibles tres successos: dues cares, dues creus, una cara i una creu. Cada succés té doncs probabilitat igual a $\frac{1}{3}$. És correcta la interpretació de d'Alembert? Per què?

PR21.–Llancem 6 daus indistingibles. Quants resultats diferents podem observar? I si els daus són distingibles?

PR22.–Considereu totes les VR_2^4 del conjunt $\{1,2,3,4\}$ i totes les V_2^4. Quines cal eliminar per tal d'aconseguir CR_2^4? i quines si volem solament els de C_2^4?

PR23.–(i)Quatre persones volen jugar simultàniament partits individuals de tennin i disposen de dues pistes. De quantes maneres podem distribuir-los, si no tenim en compte l'elecció de pista? De quantes maneres, si es té en compte la pista on juga cada parella?
(ii) De quantes maneres podem situar m persones en r llocs diferents si volem que $m_1, m_2, \ldots, m_r$ es col·loquin respectivament al lloc $1, 2\ldots, r$?

PR24.–Sis muntanyencs s'han de dividir en 3 grups de dos cada un per tal de fer l'assalt final. De quantes maneres poden fer-ho? I si els grups consten d'1, 2 i 3 persones?
Si ara cal ordenar-los en primer, segon i tercer grup d'assalt, de quantes maneres ho podrem fer?

PR25.–Proveu que (i)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-1}{n};$$

(ii)

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n-1} + \binom{m-2}{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n-1}{n-1}.$$

PR26.–Proveu que

$$\binom{m}{n} = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \cdot \binom{m-k}{n-j}$$

i calculeu $\binom{7}{3}$ i $\binom{7}{5}$ fent servir el triangle aritmètic fins a la fila 5.

PR27.–En un cistell de 550 pomes n'hi ha un 2% de podrides. Quina és la probabilitat que, en agafar-ne 25, 2 estiguin podrides?

PR28.–Barragem les cartes d'una baralla de 52 cartes. Quina és la probabilitat que els 4 asos quedin junts?

PR29.–Volem repartir en parts iguals 15 alumnes nous entre els 3 grups que hi ha a l'escola. Entre aquests 15 alumnes n'hi ha tres de gironins. Quina probabilitat hi ha que cada classe en tingui un? Quina probabilitat hi ha que tots tres vagin a parar a un mateix grup?

PR30.–Llancem sis daus. Quina és la probabilitat d'obtenir tres parelles?

PR31.–*El problema de l'aniversari*. Quina és la probabilitat que en un grup d'n persones n'hi hagi dues almenys que hagin nascut el mateix dia?

PR32.–Tenim 4 cartes conegudes i les posem de cap per avall damunt la taula. A l'atzar els donem un valor; quina és la probabilitat d'endevinear-ne 1, 2, 3 o 4?

PR33.–De quantes meneres podem posar n boles en n capses numerades de manera que una capsa exactement quedi buida? (*Indicació*: distingiu el cas distingible del cas indistingiuble.)

PR34.–*La paradoxa de Bertrand*. Tracem una corda a l'atzar en un cercle. Quina és la probabilitat que sigui més gran que no pas el costat del triangle equilàter inscrit? Distingiu tres mètodes de càlcul:

(a) la distància al centre;

(b) la situació del punt mitjà de la corda;

(c) l'angle central que determina la corda. Quina és la paradoxa?

PR35.–Col·loquem 8 torres en un tauler d'escacs. Quina és la probabilitat que cap d'elles pugui matar-ne una altre?

PR36.–Una noia vol regalar al seu xicot una camisa o una corbata pel seu aniversari. Però solament pot triar entre 3 camises i 2 corbates. Quantes tries diferents pot fer? I si vol comprar alhora una camisa i una corbata?

PR37.–En una botiga hi ha tres menes de camises per vendre

(a) Si dos homes compren una camisa cada un, de quantes maneres diferents poden fer-ho?

(b) Si un home compra dues camises, de quantes maneres pot triar-les?

PR38.–Quantes inicials diferents podem fer amb dues o tres lletres de l'alfabet?

Quantes lletres hauria de tenir un alfabet per tal que un milió de persones diferents es pogués identificar amb inicials de dues o tres lletres?

PR39.–Un test conté 12 preguntes que solament accepten la resposta de "veritat" o "fals". Si un estudiant decideix col·locar-ne sis de cada a l'atzar, de quantes maneres pot fer-ho? Suposant que efectivament sis de les preguntes siguin certes i sis falses, quina és la probabilitat que ho endivini?

PR40.–De quantes maneres es poden aparellar 4 nois i 4 noies? De quantes maneres es poden col·locar en una fila de manera que s'alternin persones de sexe diferent?

PR41.–De quantes maneres podem triar un comitè de tres persones d'un grup de 20? I de quantes si cal que una sigui el president, l'altre el vice-president i la tercera secretari?

PR42.–Si tenim dues monedes de 50 pta, dues de 25 pta i tres duros, quantes sumes diferents podem aconseguir? Si canviem una de les monedes de 25 pta en duros, quantes sumes diferents podrem aconseguir?

PR43.–En una porta hi ha dos panys i les claus són en una capsa en la qual hi ha sis claus. Si en traiem dues a l'atzar i en col·loquem una a cada pany, quina és la probabilitat que obrin la porta? Quina és la probabilitat que el parell de claus serveixi per obrir la porta?

PR44.–S'han perdut dos cargols d'una màquina que té cargols de tres mides diferents. Agafem tres cargols de mides diferents. Quina és la probabilitat que ens serveixin per arreglar la màquina?

PR45.–Llancem un dau tres vegades. Quina és la probabilitat que les tres vegades surti el número més alt? Quina és la probabilitat que cada vegada surti un valor més alt que l'anterior?

PR46.–Llancem tres daus dues vegades. Quina és la probabilitat que les dues vegades s'obtingui el mateix número

(a) si els daus són distingibles?

(b) si els daus són indistingibles?

PR47.–En una festa hi ha 6 dones i 4 homes. De quantes maneres podem formar quatre parelles de ball? I tres parelles de ball?

PR48.–Si agafem 4 sabates a l'atzar de cinc parells diferents, quina és la probabilitat que almenys poguem fer una parell de sabates?

PR49.–Sabeu que de les quatre cartes cap per avall que hi ha damunt la taula, dues són vermelles i dues negres. Els assignem un color a l'atzar. Quina és la probabilitat d'encertar-ne 4, 2 o cap?

PR50.–Un autobús fa 4 parades dins l'aeroport per tal de distribuir 15 passatgers. Quina és la probabilitat que tots baixin a la mateixa parada? Quina és la probabilitat que almenys una persona baixi a cada una de les parades?

PR51.–Deu llibres es col·loquen en dues piles. De quantes maneres podem fer-ho si els llibres són indistingibles? I si són distingibles? I si les piles són distingibles o indistingibles? Analitzeu els 4 casos.

PR52.–Repartim deu llibres diferents entre en Daniel, en Felip, en Pau i en Joan de manera que s'enduen respectivament lots de 3, 3, 2 i 2 llibres. De quantes maneres podem fer-ho?
En Pau i en Joan no estan d'acord amb aquest repartiment i es decideix repartir els lots etre ells de manera que cada un tingui un lot. De quantes maneres podem fer ara el repartiment? Ara la Maria i la Cori volen també tenir dret a aconseguir llibres. Es decideix repartir els lots entre tots sis de forma que hi haurà dues persones que no obtindran cap lot. De quantes maneres podem fer això?

PR53.–En un bombo hi ha 366 boles etiquetades amb els dies d'un any de traspàs. Si n'extreiem 180, quina és la probabilitat que corresponguin a dies distribuïts uniformement sobre els 12 mesos? Quina és la probabilitat que entre les 30 primeres boles extretes no ni hagi cap dia del mes d'Agost o de Setembre?

Mostra de solucions

Solució del problema PR5

(a) Suposem que seguim jugant realment. Tenim els següents casos i probabilitats

Favorables a A:		*Favorables a* B:	
AA	1/4	$ABBB$	1/16
ABA	1/8	$BABB$	1/16
$ABBA$	1/16	$BBAB$	1/16
BAA	1/8	BBB	1/8
$BABA$	1/16		
$BBAA$	1/16		

El problema no és equirepartit.

(b) Si el problema és equirepartit i considerem tots els casos possibles, és a dir, totes les quaternes possibles –si el joc seguís, en quatre partides segur que hi ha un guanyador– podem comptar fàcilment els casos favorables a A i els casos favorables a B que són, respectivament, 11 i 5. S'obté el mateix resultat que a (a).

Solució del problema PR9

Posem $I_n = n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$. Aleshores es demana la probabilitat del succés

$$A = (I_2 \cup I_5) \cap \overline{I_3} \cap \overline{I_4} \cap \overline{I_6},$$

on $\overline{I_n} = \mathbb{Z} - I_n$. Cal recordar que $I_n \cap I_m = \{z \in \mathbb{Z} : z = \dot{n} \text{ i } z = \dot{m}\} = I_r$, on $r = \mathrm{mcm}(m, n)$. Cal recordar també que si M i N són succesos, llavors

$$P(M \cup N) = P(M) + P(N) - P(M \cap N)$$

i, com que $M \cap \overline{N} = M - (M \cap N)$,

$$P(M \cap \overline{N}) = P(M) - P(M \cap N).$$

Ara cal aplicar aquestes fórmules a l'esdeveniment A.

Solució del problema PR21

Si els daus són distingibles, aleshores tenim 6^6 resultats diferents.

Si són indistingibles hi ha $CR_6^6 = 462$ casos, que es poden desglosar:

- tots iguals: $C_6^1 = 6$
- 5 d'iguals: $C_6^1 \cdot C_5^1 = 30$
- 4 d'iguals i $\begin{cases} \text{2 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^2 = 60 \\ \text{2 d'iguals:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 = 30 \end{cases}$
- 3 d'iguals i $\begin{cases} \text{3 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^3 = 60 \\ \text{2 d'iguals i un de diferent:} \quad C_6^1 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 120 \\ \text{3 d'iguals:} \quad C_6^2 = 15 \end{cases}$
- 2 d'iguals i $\begin{cases} \text{4 de diferents:} \quad C_6^1 \cdot C_5^4 = 30 \\ \text{2 d'iguals i 2 de diferents:} \quad C_6^2 \cdot C_4^2 = 90 \\ \text{2 d'iguals i 2 diguals:} \quad C_6^3 = 20 \end{cases}$
- tots diferents: $C_6^6 = 1$

Solució del problema PR32

Tenim 4! maneres diferents d'assignar valors. Volem calcular la probabilitat d'encertar exactament una carta que pot se la primera, o la segona, o la tercera o la quarta. Si les cartes *reals* són a, b, c i d i suposem que hem d'encertar la quarta, els valors que podem assignar a les tres primeres són

$$abc, acb, bac, cba, bca, cab.$$

D'aquests casos, els únics que són favorables a encertar només la quarta són els dos darrers. Els mateix valor ens sortiria si calculéssim els casos favorables a encertar exactament la primera, la segona o la tercera. Els casos favorables en total són 8 i la probabilitat serà $8/24 = 1/3$.

Si hem d'encertar exactament dues cartes, el parell de cartes encertades es pot triar de $C_4^2 = 6$ maneres diferents, i si per exemple hem d'encertar la tercera i la quarta, els valors que podem assignar a la primera i la segona són

$$ab, ba$$

i només aquest últim fa que no s'encerti ni a primera ni la segona. Els casos favorables són 6 i la probabilitat és $6/24 = 1/4$.

Encertar exactament tres cartes és impossible.

Calculeu la probabilitat d'encertar totes les cartes, i la de no encertar-ne cap.

Solució del problema PR42

És un problema de comptes de la vella, és a dir, cal comptar sense equivocar-se ni deixar-se cap cas, ni repetir-ne cap.

D (duros)	$D+25$	$D+2\cdot 25$ $(D+50)$	$D+25+50$	$D+2\cdot 25+50$ $(D+2\cdot 50)$	$D+2\cdot 50$ $+25$	$D+2\cdot 50$ $+2\cdot 25$
	25	50	75	100	125	150
5	30	55	80	105	130	155
10	35	60	85	110	135	160
15	40	65	90	115	140	165.

L'altre cas es deixa per al lector.